SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Series

Docente: PHFLUCKER H. COZ

academiacesarvallejo.edu.pe

SUMATORIA

Sean las expresiones $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. La suma de estos puede ser expresada mediante una notación abreviada:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(n sumandos)

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{3}(5k+4) = (5.1+4) + (5.2+4) + (5.3+4)$

  (término; inicio; K=1, K=2, K=3)

  $= 42$

PROPIEDADES

1. $$\sum_{k=1}^{n} C a_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(c es una constante)

2. $$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{6} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{6} k^2$
- $\sum_{k=1}^{7}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{7} k^2 + \sum_{k=1}^{7} k$

SUMAS NOTABLES

1. $$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ sumandos}} = c.n$$

- $$\sum_{k=1}^{10} 15 = \underbrace{15 + 15 + 15 + \cdots + 15}_{10 \text{ sumandos}} = 15 \cdot 10 = 150$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

2. $$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

+1

- $$\sum_{n=0}^{10} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = \frac{2^{10+1} - 1}{2 - 1} = 2^{11+1} - 1$$

- $$\sum_{n=0}^{20} (-3)^n = 1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 \ldots + (-3)^n$$

$$= \frac{(-3)^{n+1} - 1}{(-3) - 1}$$

obs

$$\frac{b-a}{a.b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

3. Propiedad telescópica.

$$\sum_{k=m}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(m)$$

- $$\sum_{k=3}^{10} \left(\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}\right) = \left(\frac{10+1}{10+2} - \frac{3}{3+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{11}{12} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=m}^{n} [f(k) - f(k+1)] = f(m) - f(n+1)$$

- $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2 + k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación:

Considere

$$a_{(n)} = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots}_{n-1\ sumandos}$$

Determine el valor de $a(50) - 0{,}01$.

$A)\ 0{,}96$ $B)\ 0{,}98$ $C)\ 0{,}95$ $D)\ 0{,}99$ $E)\ 0{,}97$

Resolución:

UNI_2022_I

$$a(n) = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{(n-1).(n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$a(n) = \frac{1}{1}-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$$\rightarrow a(50) = \frac{49}{50}$$

Piden:

$$a(50) - 0{,}01 = \frac{49}{50} - 0{,}01 = \mathbf{0{,}97}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN

Dada la sucesión de infinitos números reales $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3; \ldots;\ a_n; \ldots)$. La sucesión de sumas parciales se define como

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

Enésima suma parcial

A partir de ellos se forma la sucesión de sumas parciales

$$(S_n) = (a_1;\ a_1 + a_2;\ a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots;\ S_n;\ \ldots)$$
$$(S_n) = (S_1;\ S_2;\ S_3;\ \ldots;\ S_n;\ \ldots)$$

Ejemplo

Sea la sucesión $(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$

Las sumas parciales de la sucesión son:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\vdots$$

Luego se forma la sucesión de sumas parciales

$$(S_n) = \left(1;\ 1 + \frac{1}{2};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};\ \ldots;\ S_n;\ \ldots\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

$$S_1;\quad S_2;\quad S_3;\quad \ldots$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SERIES

Una serie se forma por la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$ y se denota por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(2n) = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

Convergencia de una serie

Se dirá que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si la sucesión de suma parciales (S_n) converge, es decir:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ejemplos

Analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2+k}\right)$ a_k

Resolución

la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \mathbf{1}$$

∴ La serie converge a 1

- Analice la convergencia de la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Resolución

la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^n}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

∴ el punto de convergencia es $\frac{1}{2}$

- Analice la divergencia de la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n$

Resolución

- Tomando límite:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 - 1 - 1 \ldots & ;\ \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 + 1 + 1 \ldots & ;\ \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La serie diverge.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SERIES NOTABLES

Serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = +\infty$$

La serie armónica es divergente.

Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$$

r : razón

I. Si $-1<r<1$, entonces la serie converge

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \frac{a}{1-r}$$

II. Si $|r|\geq 1$, entonces la serie diverge

Ejemplos

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

  $r=\frac{1}{3}$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

  $r=\frac{1}{2}$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\cdots$$

  $q=\frac{3}{2} \Rightarrow$ diverge

- $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+\cdots$$

  $q=-1 \Rightarrow$ diverge

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación:

El valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(0.2)^n$$

es igual a

$A)$ 0,26 $B)$ 0,30 $C)$ 0,25 $D)$ 0,28 $E)$ 0,27

UNI 2022-I

Solución:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$$

$$q=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

Serie -p:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\ldots$$

I) Si $p>1$, la serie-p es convergente.

II) Si $p\leq 1$, la serie-p es divergente.

Ejemplos

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

  como $p=2$ ∴ converge

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{4^1}+\ldots$$

  $p=1$ ∴ diverge

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Serie telescópica:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_0)$$

Ejemplo

Calcule el valor de convergencia de:

$$S = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \cos\frac{\pi}{k}\right)$$

Resolución

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \operatorname{coscos}\frac{\pi}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \cos\frac{\pi}{k}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Series notables

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedades

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; c \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ejemplos

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Teorema

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Criterio de convergencia

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie

Si: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos

- Analice la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$ (a_n)

Es **divergente** puesto que: $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2} \neq 0$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe





Álgebra

Solucionario de la dirigida

Docente: PHFLUCKER H. COZ

1.- Se define la sumatoria

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Determine $\dfrac{S_{2n}}{S_n}$.

$A)\ x^n + 1$ $B)\ x^n - 1$ $C)\ x^{2n}$ $D)\ x - 1$ $E)\ x^{3n} - 1$

Resolución

Resolución

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \underbrace{1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots x^{n-1}}_{\text{C.N}}$$

$$S_n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

- Cambiamos n por $2n$

$$S_{2n} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1} = \frac{(x^n + 1)(x^n - 1)}{x - 1}$$

Piden

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\dfrac{(x^n + 1)(x^n - 1)}{x - 1}}{\dfrac{x^n - 1}{x - 1}}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = (x^n + 1)$$

Clave A

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

2.- Determine la siguiente suma

$$\sum_{n=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$A)\ 1$ $B)\ 2$ $C)\ 4$ $D)\ 8$ $E)\ 10$

Resolución

$$\sum_{n=1}^{40}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{40}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{40}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$$

Aplicando telescópica.

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{40}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{81}-\sqrt{1}\right)$$

$$\frac{1}{2}(8)$$

$$4$$

Clave C

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

3.- Halle el valor de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{4n^2+8n+3}\right)$$

A) $\frac{2}{3}$ B) 3 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 6

Resolución

Tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{4n^2+8n+3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Dando valores a n

$$2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{4n^2+8n+3}\right)=\frac{2}{3}$$

Clave A

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

4.- Si se cumple que

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$$

calcule L^{-2} .

A) $\frac{9}{13}$ B) 3 C) $\frac{144}{25}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Resolución

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Dando valores a n

n=1

n=2

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \ \vdots \ \vdots\right.$$

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$$

Piden

$$L^{-2} = \left(\frac{5}{12}\right)^{-2}$$

Clave C

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

5.- La suma de

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i}$$

es:

A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{17}{3}$

UNI 2022-II

Resolución

Serie geométrica.

razon : q $(-1<q<1)$

$$S=\frac{t_1}{1-q}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$1+\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=4$$

Rta $\frac{1}{3}+4$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

6.- Determine el valor de la suma

$$S = 2 + \frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \frac{133}{1000} + \cdots$$

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{25}{12}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{9}{5}$

Resolución

$$S = 1 + 1 + \frac{2+5}{10} + \frac{4+25}{100} + \frac{8+125}{1000} \cdots$$

Reordenando

$$S = \left(1 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} \cdots\right) + \left(1 + \frac{5}{10} + \frac{25}{100} + \frac{125}{1000} \cdots\right)$$

Serie geométrica de razón $\frac{2}{10}$ Serie geométrica de razón $\frac{5}{10}$

$$S = \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{10}}\right] + \left[\frac{1}{1 - \frac{5}{10}}\right] \Rightarrow S = \frac{13}{4}$$

Clave D

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

7.- Halle el valor de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

A) $\frac{2}{6}$ B) 2 C) 5 D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{5}{6}$

Resolución

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$n=1$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$n=2$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$n=3$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

$n=4$ $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

$\vdots$

Rta: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

8.- Dada las proposiciones

F I. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{-1}$ es convergente.

V II. La serie $S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots$ es convergente. ($p=2$)

V III. La serie $S = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + \cdots$ es divergente. ($p=\frac{1}{2}$)

Indique cuál(es) son verdaderas

A) I y II B) I y III C) solo I D) I, II y III E) II y III ✓

Resolución

I) Sea $x_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$q=\frac{1}{3}$ serie geométrica converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$ esto es divergente

Serie -p:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\ldots$$

I) Si $p > 1$, la serie-p es convergente.

II) Si $p \leq 1$, la serie-p es divergente.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

9.- Dada la sucesión (x_n) definida por recurrencia

$$x_{n+1} - x_n = 2n + 2; \quad x_1 = 2$$

Halle el valor de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución

Del dato: $x_{n+1} - x_n = 2n + 2$

Para $n = 1$: $x_2 - x_1 = 4$

$\Longrightarrow x_2 = 6 = 2.3$

Para $n = 2$: $x_3 - x_2 = 6$

$\Longrightarrow x_3 = 12 = 3.4$

Para $n = 3$: $x_4 - x_3 = 8$

$\Longrightarrow x_4 = 20 = 4.5$

Luego: $x_n = n(n+1)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \Longrightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Piden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

0

Aplicando la propiedad de la telescópica:

Serie telescópica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_0)$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

9. Respecto a la sucesión de Fibonacci

$$(a_n) = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...\}$$

indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. La forma recurrente de la sucesión de Fibonacci es

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ si } n \in \mathbb{N}, a_1 = 1.$$

II. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

III. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de oro).

A) VVF B) VFV C) VVV
D) VFF E) FVV

Resolución

¿Qué es un número Fibonacci?

Es un término de la siguiente sucesión

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

$1 + 1 = 2$ $1 + 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $3 + 5 = 8$ $5 + 8 = 13$

✓ La fórmula de recurrencia es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

✓ En la fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$n = n + 2$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Entre a_{n+1} $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$

Tomando límite $l = 1 + \frac{1}{l} \implies l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

✓ $a_{n+2} - a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots - a_3 - a_2 - a_1 = 1$

a_{n+1}

a_n

$a_3 = 2$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

9. Respecto a la sucesión de Fibonacci

$$(a_n) = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots\}$$

indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. La forma recurrente de la sucesión de Fibonacci es

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ si } n \in \mathbb{N},\ a_1 = 1.$$

II. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

III. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de oro).

A) VVF B) VFV C) VVV

D) VFF E) FVV

Resolución

¿Qué es un número Fibonacci?

Es un término de la siguiente sucesión

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

$1+1=2$ $1+2=3$ $2+3=5$ $3+5=8$ $5+8=13$

✓ La fórmula de recurrencia es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

✓ Si divides $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ con **n** bastante grande se tiene

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \mathbf{1,61803}$$

✓ $\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_{n+2} - a_n}_{a_{n+1}} - a_{n-1}}_{a_n} + a_{n-2} - \ldots - a_3 - a_2}_{a_3 = 2} - a_1 = 1$

....

1



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe